

Jan ZWOLAK <sup>1</sup>  
Marek MARTYNA <sup>2</sup>

## **ANALIZA NAPRĘŻEŃ KONTAKTOWYCH I NAPRĘŻEŃ ZGINAJĄCYCH WYSTĘPUJĄCYCH W PARACH ZĘBATYCH PRZEKŁADNI POWER SHIFT**

### **ANALYSIS OF CONTACT STRESS AND BENDING STRESS OCCURRING IN LOADED TOOTHED PAIRS TRANSMISSIONS POWER SHIFT**

#### **Słowa kluczowe:**

**koła zębate, przekładnie zębate power shift, naprężenia kontaktowe, naprężenia zginające, badania numeryczne**

#### **Key words:**

**gears teeth, gears transmissions power shift, contact stress, bending stresses, numerical study**

#### **Streszczenie**

W pracy przedstawiono zagadnienia związane z naprężeniami kontaktowymi i z naprężeniami zginającymi, uzyskanymi w badaniach numerycznych przekładni zębatej power shift. Badana przekładnia składa się z czternastu kół, które tworzą dziesięć par zębatach. Analizowano wpływ współczynnika przesunięcia zarysu oraz modułu na wartość naprężeń kontaktowych i naprężeń zginających.

#### **WPROWADZENIE**

W przekładniach zębatach stosowanych w układach napędowych maszyn roboczych, jak np. w ładowarkach kołowych, czy ciągnikach gąsienicowych, występują zmienne wartości momentów obrotowych, wynikające z charakteru pracy tych maszyn. Wywołują one zmienne wartości naprężeń kontaktowych i naprężeń zginających w poszczególnych kołach zębatach tworzących strukturę rozpatrywanej przekładni.

Występowanie naprężeń kontaktowych w odpowiednio długim okresie czasu prowadzi do zmęczeniowego zużycia powierzchniowego warstwy wierzchniej boku zęba, objawiającego się efektem końcowym w postaci pittingu. Natomiast naprężenia zginające powodują zmęczenie objętościowe materiału u podstawy zęba, prowadzące do pęknięcia a następnie do złamania zęba [1,2].

Przebieg zmęczeniowego zużycia powierzchniowego, jak i zmęczeniowego niszczenia objętościowego przez złamanie przy określonym obciążeniu zewnętrznym, uzależniony jest od wielu parametrów geometrycznych współpracujących ze sobą kół zębatach. Uzależniony jest także w dużym stopniu od materiału, jak i od stosowanej technologii w procesie ich obróbki wykończeniowej.

---

<sup>1</sup> Uniwersytet Rolniczy w Krakowie, e-mail: [jazwol@ar.krakow.pl](mailto:jazwol@ar.krakow.pl)

<sup>2</sup> HSW S.A. – Biuro Rozwoju, e-mail: [m.martyna@hw.pl](mailto:m.martyna@hw.pl)

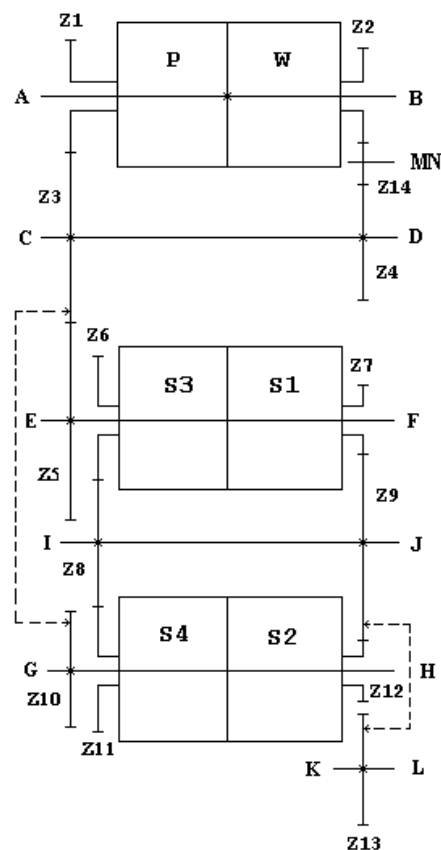
Oprócz wymienionych czynników wpływających na zmęczeniowe zużycie powierzchniowe, należy jeszcze dodać warunki smarowania występujące w strefie międzyzębnej współpracujących kół zębatach podczas eksploatacji.

W prezentowanej pracy wykorzystano wyniki doświadczalnych badań własnych w zakresie zmęczeniowej wytrzymałości powierzchniowej  $\sigma_{H \text{ lim}}$  oraz w zakresie zmęczeniowej wytrzymałości objętościowej  $\sigma_{F \text{ lim}}$ . Wyznaczone wartości  $\sigma_{H \text{ lim}}$  i  $\sigma_{F \text{ lim}}$  wykorzystano w systemie komputerowym projektowania przekładni zębatach.

System ten umożliwia prowadzenie obliczeń geometrycznych i wytrzymałościowych oraz ich optymalizację ze względu na wybrane kryteria. W dalszej części pracy rozważane będą jedynie badania numeryczne, z pominięciem badań doświadczalnych.

## PRZEDMIOT BADAŃ

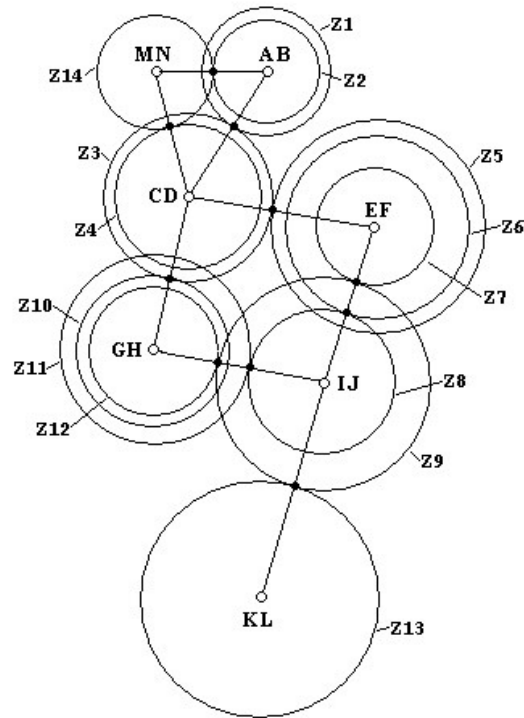
Badania numeryczne prowadzono na 8-stopniowej przekładni zębatej power shift, przeznaczonej do układu napędowego ładowarki kołowej. Schemat kinematyczny w układzie osiowym rozważanej przekładni przedstawiono na rysunku 1.



**Rys.1. Schemat kinematyczny w układzie osiowym przekładni zębatej power shift**

Fig. 1. Kinematic diagram in axial gears transmissions power shift

Symbole występujące na rysunku 1 oznaczają:  $z_1, z_2, \dots, z_{14}$  – koła zębata, AB, CD, ..., MN – wałki, P – sprzęgło kierunkowe jazdy do przodu, W – sprzęgło kierunkowe jazdy do tyłu,  $S_1, \dots, S_4$  – sprzęgła do włączania poszczególnych biegów. W celu ułatwienia zapisu łańcucha kinematycznego utworzonego przez koła zębata na poszczególnych biegach, przedstawiono schemat kinematyczny w układzie promieniowym rozpatrywanej przekładni na rysunku 2.



**Rys.2. Schemat kinematyczny w układzie promieniowym przekładni zębatej power shift**  
 Fig. 2. Kinematic diagram in radian gears transmissions powers shift

Na podstawie rysunku 1 i 2 utworzone pary zębate z odpowiednich kół, będących w ciągłym zazębieniu, dają się zapisać jako przełożenia na poszczególnych biegach:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= \frac{z_3 * z_5 * z_9 * z_{13}}{z_1 * z_3 * z_7 * z_9} & i_5 &= \frac{z_{14} * z_4 * z_5 * z_9 * z_{13}}{z_2 * z_{14} * z_3 * z_7 * z_9} \\
 i_2 &= \frac{z_3 * z_{10} * z_9 * z_{13}}{z_1 * z_3 * z_{12} * z_9} & i_6 &= \frac{z_{14} * z_4 * z_{10} * z_9 * z_{13}}{z_2 * z_{14} * z_3 * z_{12} * z_9} \\
 i_3 &= \frac{z_3 * z_5 * z_8 * z_{13}}{z_1 * z_3 * z_6 * z_9} & i_7 &= \frac{z_{14} * z_4 * z_5 * z_8 * z_{13}}{z_2 * z_{14} * z_3 * z_6 * z_9} \\
 i_4 &= \frac{z_3 * z_{10} * z_8 * z_{13}}{z_1 * z_3 * z_{11} * z_9} & i_8 &= \frac{z_{14} * z_4 * z_{10} * z_8 * z_{13}}{z_2 * z_{14} * z_3 * z_{11} * z_9}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Przełożenia całkowite:  $i_1, i_2, i_3, i_4$ , będące iloczynem przełożeń elementarnych poszczególnych par zębatach, odnoszą się do biegów jazdy do przodu. Natomiast przełożenia:  $i_5, i_6, i_7, i_8$ , dotyczą biegów jazdy do tyłu.

Wartości liczbowe przełożeń elementarnych i całkowitych (wzór 1) wykazujące różnice na poszczególnych biegach sprawiają, że zmieniają się wartości liczbowe naprężeń kontaktowych i naprężeń zginających tej samej pary zębatej, występującej w łańcuchu kinematycznym poszczególnych biegów.

## SYSTEM KOMPUTEROWY W ANALIZIE NAPRĘŻEŃ ZGINAJĄCYCH I NAPRĘŻEŃ KONTAKTOWYCH

Podstawowe zagadnienia związane z obliczeniami przekładni zębatych mogą być analizowane za pomocą autorskiego systemu komputerowego [3]. System ten umożliwia prowadzenie obliczeń geometrycznych i wytrzymałościowych z optymalizacją wielokryterialną, jak też obliczeń bez optymalizacji. Poprzez odpowiednie zadawanie danych w programie można przeprowadzać obliczenia dla różnych zestawów zmiennych decyzyjnych. W rozpatrywanym przypadku obliczenia prowadzono traktując jako zmienne decyzyjne: moduł oraz współczynniki przesunięcia zarysu. W programie aktywne były wszystkie dostępne kryteria cząstkowe oraz ograniczenia a w analizowanych wynikach skupiono się głównie na naprężeniach zginających  $\sigma_F$  oraz naprężeniach kontaktowych  $\sigma_H$ .

Takie podejście miało na celu wygenerowanie zestawów: moduł, współczynniki przesunięcia zarysu oraz odpowiadających im naprężeniom zginającym  $\sigma_F$  oraz kontaktowym  $\sigma_H$ , aby pokazać ich wzajemne relacje. Bez wykorzystania optymalizacji byłoby to bardzo trudne zadanie z powodu złożoności problemu oraz skomplikowanego obszaru dopuszczalnego. Ze względu na brak danych rzeczywistych w obliczeniach przyjęto 5 punktów startowych, które wprawdzie nie spełniały wszystkich ograniczeń (całkowita liczba ograniczeń 574) ale pozwoliły na realizację obliczeń i znalezienie zadowalających rozwiązań z obszaru dopuszczalnego.

### ANALIZA OBCIĄŻEŃ PRZEKŁADNI

Analizę obciążeń przekładni przeprowadzono przy momencie wejściowym  $M = 1500 \text{ Nm}$  oraz prędkości obrotowej  $n = 1800 \text{ min}^{-1}$ . Wykonano obliczenia naprężeń zginających  $\sigma_F$  oraz naprężeń kontaktowych  $\sigma_H$  wszystkich par zębatych tworzących strukturę rozpatrywanej przekładni. Wyniki obliczeń (bez optymalizacji) dla jednego z punktów startowych przedstawiono w tabeli 1.

**Tabela 1. Naprężenia zginające i naprężenia kontaktowe w parach zębatych tworzących przekładnię power shift przed optymalizacją**

Table 1. Bending stresses and contact stress in toothed pairs forming a power shift transmissions before optimization

Para zębata	Naprężenia zginające $\sigma_F$ [MPa]		Naprężenia kontaktowe $\sigma_H$ [MPa]	
	$Z_1 : Z_3$	$\sigma_{F1} = 419$	$\sigma_{F3} = 469$	$\sigma_{H1} = 1191$
$Z_3 : Z_5$	$\sigma_{F3} = 469$	$\sigma_{F5} = 417$	$\sigma_{H3} = 1196$	$\sigma_{H5} = 1108$
$Z_7 : Z_9$	$\sigma_{F7} = 480$	$\sigma_{F9} = 563$	$\sigma_{H7} = 1382$	$\sigma_{H9} = 1370$
$Z_9 : Z_{13}$	$\sigma_{F9} = 563$	$\sigma_{F13} = 494$	$\sigma_{H9} = 1370$	$\sigma_{H13} = 1172$
$Z_3 : Z_{10}$	$\sigma_{F3} = 469$	$\sigma_{F10} = 425$	$\sigma_{H3} = 1196$	$\sigma_{H10} = 1224$
$Z_{12} : Z_9$	$\sigma_{F12} = 291$	$\sigma_{F9} = 563$	$\sigma_{H12} = 1162$	$\sigma_{H9} = 1370$
$Z_6 : Z_8$	$\sigma_{F6} = 305$	$\sigma_{F8} = 294$	$\sigma_{H6} = 1095$	$\sigma_{H8} = 1125$
$Z_{11} : Z_8$	$\sigma_{F11} = 167$	$\sigma_{F8} = 294$	$\sigma_{H11} = 897$	$\sigma_{H8} = 1125$
$Z_2 : Z_{14}$	$\sigma_{F2} = 363$	$\sigma_{F14} = 392$	$\sigma_{H2} = 1211$	$\sigma_{H14} = 1200$
$Z_{14} : Z_4$	$\sigma_{F14} = 392$	$\sigma_{F4} = 355$	$\sigma_{H14} = 1200$	$\sigma_{H4} = 1186$

Z tabeli 1 wynika, że największe obciążenia w rozpatrywanej strukturze przekładni przenosi para zębata  $Z_9:Z_{13}$ . Natomiast para zębata  $Z_{11}:Z_8$  w całym łańcuchu kinematycznym przekładni przenosi obciążenia najmniejsze. Maksymalne obciążenie pary zębatej  $Z_9:Z_{13}$

wynika stąd, iż para ta jest ostatnim ogniwem przekładni w przeniesieniu momentu obrotowego na wszystkich stopniach przełożeń. Natomiast para zębata  $z_{11}:z_8$  jest jedyną parą we wzorze (1) pozwalającym na obliczenie przełożenia  $i_4$  oraz  $i_8$  (stopień najwyższy przełożenia z najmniejszym momentem obrotowym), która nie występuje w obliczeniach innych przełożeń zapisanych za pomocą wzoru (1).

W dalszej analizie obciążeń wykonano obliczenia optymalizacyjne naprężeń zginających  $\sigma_F$  oraz naprężeń kontaktowych  $\sigma_H$ , w zależności od wartości liczbowej modułu i współczynnika przesunięcia zarysu. Wybrane wyniki tych obliczeń przedstawiono w tabeli 2.

**Tabela 2. Naprężenia zginające i naprężenia kontaktowe w parach zębatych tworzących przekładnię power shift po optymalizacji**

Table 2. Bending stresses and contact stress in toothed pairs forming a power shift transmissions after optimization

Para zębata	Naprężenia zginające $\sigma_F$ [MPa]		Naprężenia kontaktowe $\sigma_H$ [Mpa]	
	$z_1 : z_3$	$\sigma_{F1} = 310$	$\sigma_{F3} = 346$	$\sigma_{H1} = 1041$
$z_3 : z_5$	$\sigma_{F3} = 346$	$\sigma_{F5} = 306$	$\sigma_{H3} = 1048$	$\sigma_{H5} = 974$
$z_7 : z_9$	$\sigma_{F7} = 418$	$\sigma_{F9} = 505$	$\sigma_{H7} = 1386$	$\sigma_{H9} = 1360$
$z_9 : z_{13}$	$\sigma_{F9} = 505$	$\sigma_{F13} = 424$	$\sigma_{H9} = 1360$	$\sigma_{H13} = 1138$
$z_3 : z_{10}$	$\sigma_{F3} = 346$	$\sigma_{F10} = 314$	$\sigma_{H3} = 1048$	$\sigma_{H10} = 1068$
$z_{12} : z_9$	$\sigma_{F12} = 246$	$\sigma_{F9} = 505$	$\sigma_{H12} = 1059$	$\sigma_{H9} = 1360$
$z_6 : z_8$	$\sigma_{F6} = 279$	$\sigma_{F8} = 268$	$\sigma_{H6} = 1051$	$\sigma_{H8} = 1093$
$z_{11} : z_8$	$\sigma_{F11} = 166$	$\sigma_{F8} = 268$	$\sigma_{H11} = 896$	$\sigma_{H8} = 1093$
$z_2 : z_{14}$	$\sigma_{F2} = 273$	$\sigma_{F14} = 293$	$\sigma_{H2} = 1059$	$\sigma_{H14} = 1040$
$z_{14} : z_4$	$\sigma_{F14} = 293$	$\sigma_{F4} = 268$	$\sigma_{H14} = 1040$	$\sigma_{H4} = 1023$

Porównując wartości naprężeń z tabeli 1 i z tabeli 2 zauważa się, że przeprowadzona optymalizacja z udziałem modułu i współczynników korekcji pozwala na istotne zmniejszenie wartości naprężeń zginających  $\sigma_F$  oraz naprężeń kontaktowych  $\sigma_H$ .

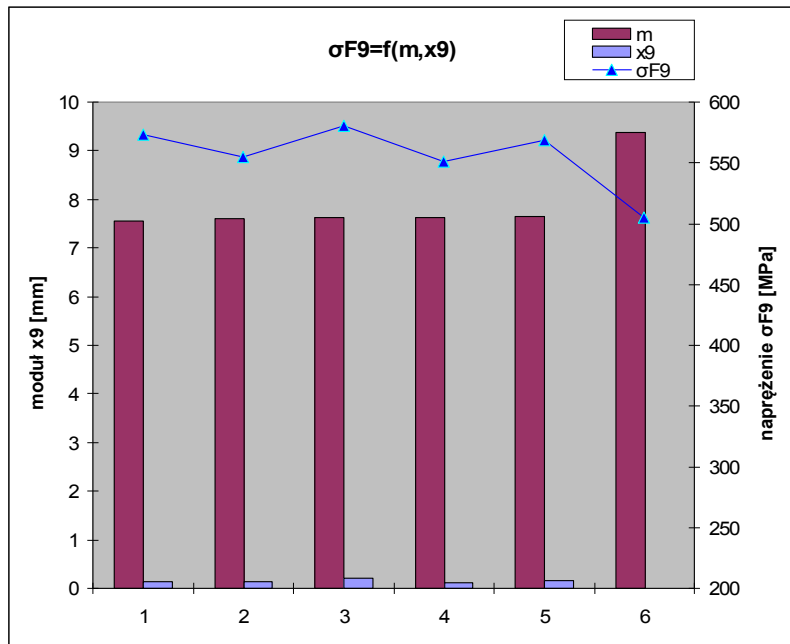
Wartości obliczonych w procedurze optymalizacyjnej naprężeń zginających i naprężeń kontaktowych pary zębatej  $z_9:z_{13}$ , odniesionych do kilku wybranych wartości modułu  $m$  i współczynników korekcji  $x_9$  oraz  $x_{13}$  przedstawiono w tabeli 3.

**Tabela 3. Naprężenia zginające i kontaktowe pary zębatej  $z_9:z_{13}$**

Table 3. Bending stresses and contact stress of the toothed pairs  $z_9:z_{13}$

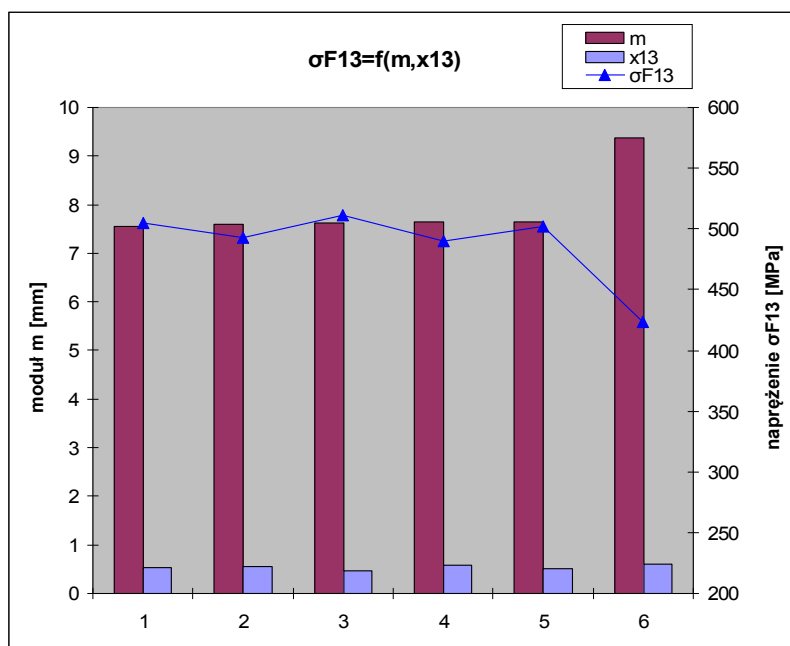
$m$	$x_9$	$x_{13}$	$\sigma_{F9}$	$\sigma_{F13}$	$\sigma_{H9}$	$\sigma_{H13}$
7.5488	0.1484	0.5199	573	505	1383	1180
7.6079	0.1325	0.5600	555	493	1379	1163
7.6228	0.2064	0.4723	581	511	1375	1179
7.6331	0.1186	0.5713	551	490	1379	1160
7.6487	0.1588	0.5170	569	502	1367	1168
9.3806	-0.0607	0.5922	505	424	1360	1138

Na podstawie wyników z tabeli 3 zbudowano wykresy przedstawiające zależność naprężeń od modułu i współczynników korekcji. Naprężenia zginające w kole  $z_9$  dla sześciu przypadków modułu i współczynnika korekcji przedstawiono na rysunku 3.



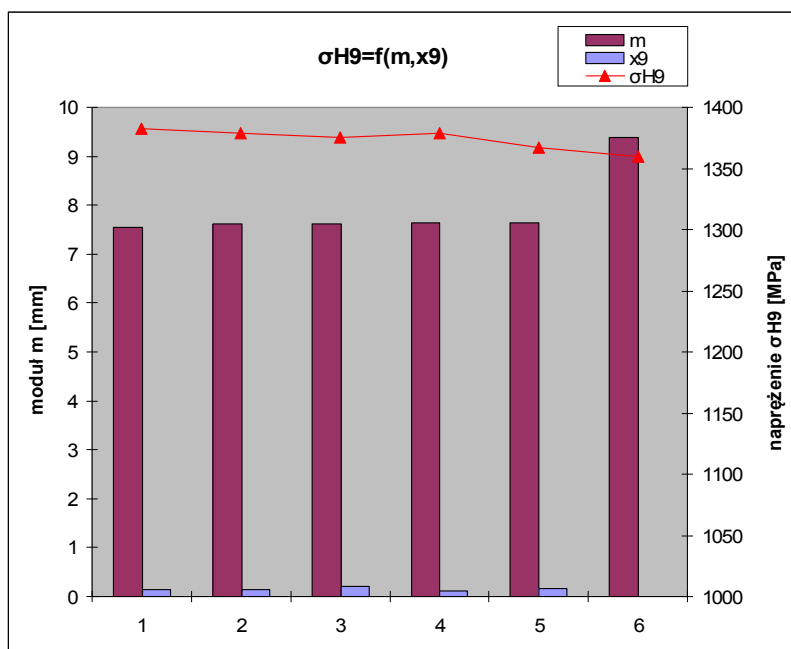
**Rys.3. Naprężenia zginające  $\sigma_{F9}$  w kole zębatym  $z_9$  w zależności od modułu i korekcji**  
 Fig.3. Bending stresses  $\sigma_{F9}$  in the gear teeth  $z_9$  depending on the module and the correction

Dla koła  $z_{13}$  współpracującego z kołem zębatym  $z_9$  wykres naprężeń zginających przedstawiono na rysunku 4.



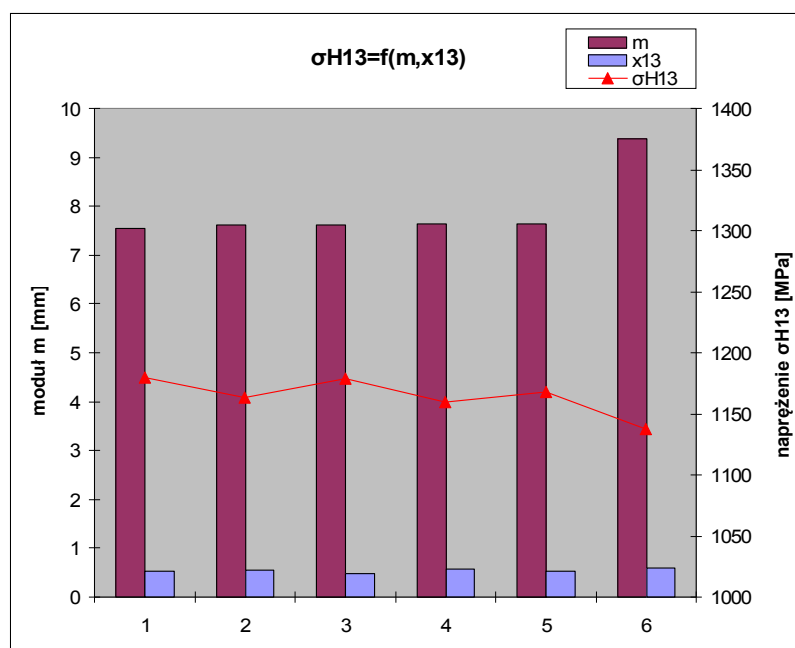
**Rys.4. Naprężenia zginające  $\sigma_{F13}$  w kole zębatym  $z_{13}$  w zależności od modułu i korekcji**  
 Fig.4. Bending stresses  $\sigma_{F13}$  in the gear teeth  $z_{13}$  depending on the module and the correction

Wyniki z tabeli 3 wykorzystano także do budowy wykresów ilustrujących zależności naprężeń kontaktowych  $\sigma_H$  od wartości modułu i współczynników korekcji. Jedną z takich zależności przedstawiono na rysunku 5.



Rys.5. Naprężenia kontaktowe  $\sigma_{H9}$  w kole zębatym  $z_9$  w zależności od modułu i korekcji  
 Fig.5. Contact stress  $\sigma_{H9}$  in the gear teeth  $z_9$  depending on the module and the correction

Naprężenia kontaktowe występujące w kole współpracującym  $z_{13}$ , w postaci wykresu przedstawiono na rysunku 6.



Rys.6. Naprężenia kontaktowe  $\sigma_{H13}$  w kole zębatym  $z_{13}$  w zależności od modułu i korekcji  
 Fig.6. Contact stress  $\sigma_{H13}$  in the gear teeth  $z_{13}$  depending on the module and the correction

Wykresy na rysunkach: 3, 4, 5 i 6 wskazują na zależność naprężeń zginających  $\sigma_F$ , jak i naprężeń kontaktowych  $\sigma_H$  od wartości modułu  $m$  i współczynnika korekcji  $x$ .

## PODSUMOWANIE

Pary zębate występujące w analizowanej przekładni power shift przenoszą obciążenia o znacznym stopniu zróżnicowania, które generują także odpowiednio zmienne naprężenia zginające  $\sigma_F$  i naprężenia kontaktowe  $\sigma_H$ . O dużym zróżnicowaniu naprężeń zginających i naprężeń kontaktowych poszczególnych par zębatych dowodzą wyniki obliczeń zamieszczone w tabelach 1 i 2. Wśród tych wyników zauważa się, że większe zróżnicowanie w poszczególnych parach zębatych występuje w naprężeniach zginających, natomiast mniejsze w naprężeniach kontaktowych. Warto tu dostrzec i to, że w parze zębatej  $z_{11}:z_8$ , zęby koła zębatego  $z_{11}$  mają najniższą wartość naprężeń zginających i naprężeń kontaktowych. Wynika to stąd, że koło  $z_{11}$  tworzy tylko jedną parę zębatą z kołem  $z_8$ , która znajduje się w łańcuchu kinematycznym biegu IV i biegu VIII o małej wartości przenoszonego momentu obrotowego.

Analiza wyników zamieszczonych w tabeli 3 oraz wykresów na rysunkach: 3, 4, 5 i 6 wskazuje, że wartość modułu i współczynnika korekcji w większym stopniu wpływa na zmianę naprężeń zginających, aniżeli naprężeń kontaktowych. Ocena takiego wpływu w wymiarze ilościowym umożliwi konstruktorowi kształtowanie zasobu funkcjonalności przekładni zębatej na etapie projektowania.

## LITERATURA

1. Muller L.: Przekładnie zębate, projektowanie. Warszawa: WNT, 1996.
2. Jaśkiewicz Z., Wąsiewski A.: Przekładnie walcowe. Warszawa: WKŁ, 1992.
3. Martyna M., Zwolak J.: Program PRZEKLADNIA (<http://www.gearbox.com.pl>).

## Summary

**The study summarizes the problems associated with contact stress and bending stress highlighted in the course of numerical tests of a power shift incorporating fourteen wheels, making up ten toothed pairs. The study investigates the influence of the addendum modification coefficient and of the module on the value of contact stress and bending stresses.**